

# Theoretische Grundlagen

## 1. Mechanismen der Wärmeübertragung

Wärmeübertragung ist die Übertragung von Energie in Form eines Wärmestromes. Sie erfolgt stets dort, wo Temperaturunterschiede innerhalb eines Mediums existieren oder zwischen Medien mit unterschiedlicher Temperatur. Dabei wird die Energie stets vom Medium mit der höheren Temperatur zum Medium mit der niedrigeren Temperatur übertragen.

Man unterscheidet drei Mechanismen der Wärmeübertragung, auf die in den folgenden Punkten näher eingegangen werden soll.

- Wärmeleitung
- Konvektion
- Strahlung

### 1.1. Wärmeleitung

Existiert in einem **stationärem** Medium, das kann ein fester Körper aber auch ein ruhendes Fluid sein, ein Temperaturgradient, wird die Wärme durch Wärmeleitung übertragen.

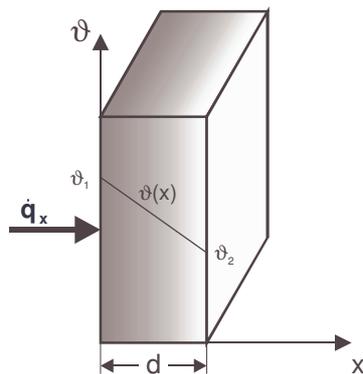


Abbildung 1: Stationäre Wärmeleitung an einer ebenen Wand

Im einfachsten Fall, einer unendlich ausgedehnten, ebenen Wand, berechnet sich dann die Wärmestromdichte für den eindimensionalen, stationären Fall nach dem Fourierschen Gesetz der Wärmeleitung

$$\dot{q}_{WL} = -\lambda \cdot \frac{d\vartheta}{dx} \quad (1)$$

Für eine endlich ausgedehnte Wand mit konstanter Wärmeleitfähigkeit bzw. konstantem Temperaturgradienten erhält man daraus die Gleichung für den Wärmestrom

$$\dot{Q}_{WL} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{d} \quad (2)$$

mit folgenden Größen:

- $\dot{Q}_{WL}$  - Wärmestromdichte durch Wärmeleitung
- $\lambda$  - Wärmeleitfähigkeit
- $A$  - Fläche der Wand
- $\vartheta$  - Temperatur
- $d$  - Dicke der Wand

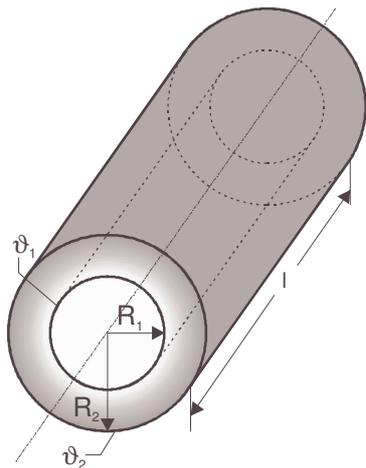


Abbildung 2: Stationäre Wärmeleitung an einem Zylinder

Häufig muß zur Abschätzung von Wärmeverlusten auch der Wärmestrom durch eine Rohr- oder Zylinderwand bestimmt werden. Für den stationären Fall berechnet sich dann der Gesamtwärmestrom bei konstanter Wärmeleitfähigkeit zu

$$\dot{Q}_{WL} = \frac{2 \cdot \pi \cdot l \cdot \lambda \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\ln(R_2 / R_1)} \quad (3)$$

## 1.2. Konvektion

Betrachtet man die Grenzfläche zwischen einem festen Körper und einem sich bewegendem Fluid, wird bei einem Temperaturunterschied Wärme durch Konvektion übertragen.

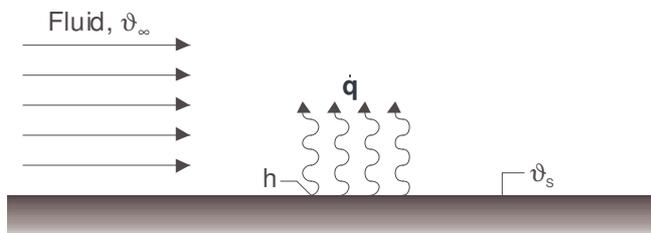


Abbildung 3: Wärmeübertragung durch Konvektion

Dabei hängt die Größe des Wärmestromes neben der Temperaturdifferenz und der Fläche der Grenzschicht von weiteren Parametern ab, die im sogenannten konvektiven Wärmeübergangskoeffizienten  $h$  zusammengefasst sind. Diese Parameter sind zum Beispiel die Lage der Grenzfläche (horizontal oder vertikal), die Art der Konvektionsströmung (freie oder erzwungene Konvektion), die Art und die Geschwindigkeit des Fluids sowie die Geometrie der Grenzfläche. Ist der konvektive Wärmeübergangskoeffizient bekannt, berechnet sich der konvektive Wärmestrom zu

$$\dot{Q}_K = h \cdot A \cdot (\vartheta_s - \vartheta_\infty) \quad (4)$$

mit folgenden Größen:

- $\dot{Q}_K$  - Wärmestrom durch Konvektion
- $h$  - konvektiver Wärmeübergangskoeffizient
- $A$  - Oberfläche des festen Körpers
- $\vartheta_s$  - Oberflächentemperatur des festen Körpers

$\vartheta_{\infty}$  - Temperatur des umgebenden Fluids

In den meisten Fällen ist der konvektive Wärmeübergangskoeffizient  $h$  jedoch nicht bekannt, so dass mit Näherungslösungen gerechnet werden muß. Auf diese Näherungslösungen wird im Abschnitt „Ähnlichkeitskenngrößen“ eingegangen.

### 1.3. Strahlung

Der dritte Mechanismus der Wärmeübertragung, die Wärmestrahlung, ist eine nicht stoffgebundene Form des Energieaustausches. Sie beruht darauf, dass jeder Körper mit einer Temperatur, die oberhalb des absoluten Nullpunktes ( $T=-273,16^{\circ}\text{C}$ ) liegt, Strahlung in Form von elektromagnetischen Wellen aussendet.

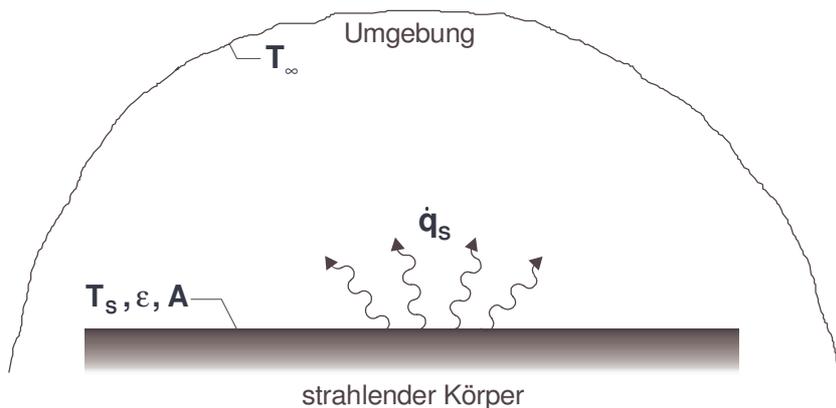


Abbildung 4: Wärmeübertragung durch Strahlung

Der Wärmestrom, den dieser Körper an die Umgebung abgibt, berechnet sich in erster Näherung zu:

$$\dot{Q}_s = \sigma \cdot \epsilon \cdot A \cdot (T_s^4 - T_{\infty}^4) \quad (5)$$

mit folgenden Größen:  $\dot{Q}_s$  - Wärmestrom durch Strahlung

$\sigma$  - Stefan-Boltzman-Konstante,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

$\epsilon$  - Emissionsgrad,  $0 \leq \epsilon \leq 1$

$A$  - Oberfläche des strahlenden Körpers

$T_s$  - Oberflächentemperatur in K

$T_{\infty}$  - Umgebungstemperatur in K

Der Emissionsgrad  $\epsilon$  ist eine physikalische Größe, die sowohl vom Material des Körpers als auch von dessen Oberflächenbeschaffenheit und der Wellenlänge  $\lambda$  abhängt. Beispiele für den Emissionsgrad verschiedener Stoffe sind in Tabelle 1 zu finden.

Material	Emissionsgrad $\epsilon$
Aluminium, blank	0,05
Kupfer, poliert	0,03
Kupfer, oxidiert	0,50...0,80
Lackfarbe weiß	0,90
Lackfarbe, schwarz	0,98
Wasser	0,96
Stahl, blank	0,22
Stahl, oxidiert	0,33...0,76

Tabelle 1: Emissionsgrad von Stoffen

Ein Spezialfall, für den eine analytische Lösung existiert, ist der Strahlungsaustausch zwischen zwei parallelen, kreisrunden Platten mit dem Radius  $r$  und dem Plattenabstand  $d$ , für den sich der Wärmestrom berechnet

$$\dot{Q}_s = \frac{\sigma \cdot \varepsilon^2 \cdot \pi \cdot R^2}{1 - (1 - \varepsilon^2) \cdot \Phi_{12}} \cdot (T_1^4 - T_2^4)$$
$$\Phi_{12} = \frac{1}{2 \cdot R^2} \cdot \left(1 + 2 \cdot R^2 - \sqrt{1 + 4 \cdot R^2}\right) \quad \text{mit} \quad R = \frac{r}{d} \quad (6)$$

## 2. Ähnlichkeitskenngrößen

Die Ähnlichkeitstheorie und damit verbunden die Ähnlichkeitskenngrößen spielen besonders beim Wärmeübergang von einem Festkörper zu einem sich bewegendem Fluid, der Konvektion, eine besondere Rolle. Wie schon im Abschnitt 1.2. angedeutet wurde, kann in den meisten praktischen Fällen der konvektive Wärmeübergangskoeffizient  $h$  nicht exakt berechnet werden. Es existieren jedoch für verschiedene Fälle Näherungslösungen, die auf diesen dimensionslosen Ähnlichkeitskenngrößen beruhen und für ingenieurtechnische Berechnungen eine ausreichende Genauigkeit liefern.

### 2.1. Nusselt-Zahl

Die Nusselt-Zahl ist die Ähnlichkeitskenngröße, welche die konvektive Wärmeübertragung beschreibt. Sie spiegelt das Verhältnis aus konvektivem und diffusivem Wärmeübergang wider und ist definiert

$$Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda} \quad (7)$$

mit folgenden Größen:

- Nu** - Nusselt-Zahl
- h** - konvektiver Wärmeübergangskoeffizient
- L** - charakteristische Länge (hier Dicke der Schicht, durch die der Wärmetransport erfolgt)
- $\lambda$  - Wärmeleitfähigkeit des Fluides

Die Nusselt-Zahl ist per Definition immer  $Nu > 1$ .

### 2.2. Reynolds-Zahl

Die Reynolds-Zahl ist die Ähnlichkeitskenngröße, welche die Art der Strömung eines Fluides charakterisiert (z. B. laminare oder turbulente Strömung). Sie spiegelt das Verhältnis von inneren Trägheitskräften und Reibungskräften im Fluid wider und ist definiert

$$Re = \frac{v \cdot L}{\nu} \quad (8)$$

mit folgenden Größen:

- Re** - Reynolds-Zahl
- v** - Geschwindigkeit der Strömung
- L** - charakteristische Länge (hier Weglänge in Strömungsrichtung)

$\nu$  - kinematische Zähigkeit des Fluides

Die Reynolds-Zahl charakterisiert den Wärmeübergang bei **erzwungener Konvektion**. Für sehr zähe Fluide mit einer geringen Geschwindigkeit, wie z.B. Honig auf einem Frühstückstoast ist  $Re \ll 1$ , während für sehr viskose Fluide mit einer hohen Geschwindigkeit, wie z.B. die Luftströmung um ein Flugzeug  $Re \gg 1$  wird.

### 2.3. Prandtl-Zahl

Die Prandtl-Zahl ist die Ähnlichkeitskenngröße, welche die Stoffeigenschaften des Fluids charakterisiert. Sie spiegelt das Verhältnis von innerer Reibung zur Wärmeleitung wider und ist definiert

$$Pr = \frac{\nu}{a} \quad (9)$$

mit folgenden Größen: **Pr** - Prandtl-Zahl  
 $\nu$  - kinematische Zähigkeit des Fluides  
**a** - Temperaturleitfähigkeit, thermische Diffusivität

Für Luft unter Normaldruck und in einem Temperaturbereich von  $0^\circ\text{C} < \vartheta < 50^\circ\text{C}$  ist  $Pr = 0,7$  während für Wasser in Abhängigkeit von dessen Temperatur  $Pr = 3 \dots 7$  gilt.

### 2.4. Grashof-Zahl, Rayleigh-Zahl

Die Grashof-Zahl ist die Ähnlichkeitskenngröße, die in Analogie zur Reynoldszahl eine Strömung, die durch Auftriebskräfte angetrieben wird (z.B. freie Konvektion), charakterisiert. Sie spiegelt das Verhältnis von thermischen Auftriebskräften und inneren Trägheitskräften wider und ist definiert

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot \Delta\vartheta \cdot L^3}{\nu^2} \quad (10)$$

mit folgenden Größen: **Gr** - Grashof-Zahl  
 $\beta$  - thermischer Ausdehnungskoeffizient  
**g** - Erdbeschleunigung  
 $\Delta\vartheta$  - Temperaturdifferenz  
**L** - charakteristische Länge  
 $\nu$  - kinematische Zähigkeit des Fluides

Die Rayleigh-Zahl definiert sich aus dem Produkt von Grashof- und Prandtl-Zahl und schließt die Wärmeleitung des Fluides mit ein.

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad (11)$$

Die Grashof-/Rayleigh-Zahl charakterisiert den Wärmeübergang bei **freier Konvektion**. In Abhängigkeit von der Geometrie und den Eigenschaften des Fluides geben sie Auskunft darüber, ob die Konvektionsströmung laminar oder turbulent ist.

### 2.5. Ingenieurtechnische Näherungslösungen für h

Für einige spezielle Fälle des konvektiven Wärmeüberganges existieren Näherungslösungen, bei denen aus den gegebenen Prozessparametern zunächst die Reynolds-Zahl im Falle der erzwungenen Konvektion oder die Grashof(Rayleigh)-Zahl bei freier Konvektion bestimmt werden. Daraus kann dann die Nusselt-Zahl bzw.

der konvektive Wärmeübergangskoeffizient  $h$  berechnet werden. Im folgenden sind einige für den Ingenieur relevante Fälle gezeigt.

### Erzwungene Konvektion

- Längs angeströmte, ebene Platte, vollständig beheizt oder gekühlt

$$\mathbf{Nu} = 0,332 \cdot \mathbf{Re}^{1/2} \cdot \mathbf{Pr}^{1/3} \quad \text{für } \mathbf{Re} < 5 \cdot 10^5 \text{ (laminare S.)} \quad (12)$$

$$\mathbf{Nu} = \frac{0,037 \cdot \mathbf{Re}^{0,8} \cdot \mathbf{Pr}}{1 + 2,443 \cdot \mathbf{Re}^{-0,1} \cdot (\mathbf{Pr}^{2/3} - 1)} \quad \text{für } 5 \cdot 10^5 < \mathbf{Re} < 10^7 \text{ (turbulente S.)} \quad (13)$$

Die charakteristische Länge für die Berechnung der Nusselt- und der Rayleigh-Zahl ist in diesem Fall die Länge der Platte.

### Freie Konvektion

- Senkrechte, beheizte Platte

$$\mathbf{Nu} = \left\{ 0,825 + \frac{0,387 \cdot \mathbf{Ra}^{1/6}}{\left[ 1 + (0,492 / \mathbf{Pr})^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \quad (14)$$

Die charakteristische Länge für die Berechnung der Nusselt- und der Rayleigh-Zahl ist in diesem Fall die Höhe der senkrechten Platte.

- Waagerechte, beheizte Platte, Oberseite beheizt bzw. Unterseite gekühlt

$$\mathbf{Nu} = 0,54 \cdot \mathbf{Ra}^{1/4} \quad \text{für } 10^4 < \mathbf{Ra} < 10^7 \text{ (laminare S.)} \quad (15)$$

$$\mathbf{Nu} = 0,15 \cdot \mathbf{Ra}^{1/3} \quad \text{für } 10^7 < \mathbf{Ra} < 10^{11} \text{ (turbulente S.)} \quad (16)$$

Die charakteristische Länge für die Berechnung der Nusselt- und der Rayleigh-Zahl ist in diesem Fall der Quotient aus Oberfläche und Umfang der äußeren Plattenumrandung.

- Waagerechter Zylinder mit großer Länge gegenüber dem Durchmesser

$$\mathbf{Nu} = \left\{ 0,60 + \frac{0,387 \cdot \mathbf{Ra}^{1/6}}{\left[ 1 + (0,559 / \mathbf{Pr})^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 \quad (17)$$

Die charakteristische Länge für die Berechnung der Nusselt- und der Rayleigh-Zahl ist in diesem Fall der Durchmesser des Zylinders.

## 3. Das Ilmenauer Fass

Das Ilmenauer Fass ist ein großes Rayleigh-Bénard(RB)-Experiment zur Untersuchung von turbulenten Konvektionsströmungen. In ihm können thermische Konvektionsströmungen untersucht werden, die z.B. dafür verantwortlich sind, dass sich die Luft in unserer Atmosphäre bewegt, dass sich Rauch bei einem Brand in einem Tunnel besonders schnell ausbreitet oder dass der Golfstrom als warme Meeresströmung durch den vergleichsweise kalten Atlantischen Ozean fließt und den Westküsten von Irland und Großbritannien ein vergleichsweise mildes Klima beschert. Aufgrund der Größe des Ilmenauer Fasses ist es möglich diese Art von Strömungen detaillierter und realitätsnäher zu untersuchen als in anderen

Experimenten in der Welt. Der schematische Aufbau der gesamten experimentellen Anlage ist in Abbildung 5 dargestellt.

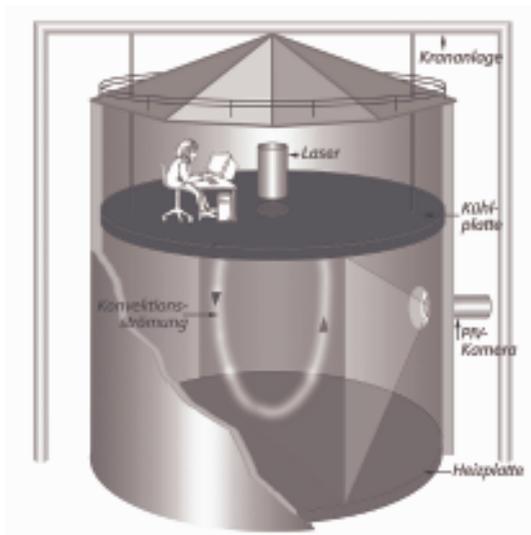


Abbildung 5: Prinzipieller Aufbau des RB-Experimentes „Ilmenauer Fass“

In einem RB-Experiment wird ein Fluid, im Ilmenauer Fass ist das gewöhnliche Luft, zwischen einer Heizplatte am Boden und einer darüber aufgehängten Kühlplatte aufgrund des Temperaturunterschiedes in Bewegung versetzt. Dabei erwärmt sich die Luft, die sich in der Nähe der Heizplatte befindet und steigt auf Grund der geringeren Dichte nach oben. Hier trifft sie auf die Kühlplatte, wo sie sich wieder abkühlt und an einer anderen Stelle wieder nach unten fällt. Die Form dieser Strömung ist von der Geometrie des Experimentes, der Temperaturdifferenz zwischen Heiz- und Kühlplatte sowie von den Stoffeigenschaften des Fluides abhängig. Sie nimmt dabei mehr oder weniger komplizierte Formen an, die von einer einfachen Walze bis zu komplizierten hexaederförmigen Strukturen reichen. Die Form wird durch die Parameter Ra-Zahl, Pr-Zahl und Aspektverhältnis bestimmt. In Abhängigkeit dieser drei Parameter ändert sich auch der Wärmestrom zwischen Heiz- und Kühlplatte, der im wesentlichen durch die beiden konvektiven Wärmeübergänge von der Heizplatte zum Fluid und vom Fluid zur Kühlplatte bestimmt wird.

Die technischen und physikalischen Parameter, welche die experimentelle Anlage charakterisieren, sind in Tabelle 2 und Tabelle 3 aufgezählt.

Durchmesser D	7,15m
Höhe H	0...6,30m
Aspektverhältnis A	1,1...100
Arbeitsmedium	Luft
Temperatur der Heizplatte $\vartheta_H$	20...80 °C
Temperatur der Kühlplatte $\vartheta_K$	15...25 °C
Heiz-/Kühlleistung	10kW

Tabelle 2: Technische Parameter

Ra-Zahl	$10^6 \dots 10^{12}$
Nu-Zahl	5...500
Re-Zahl	$10^3 \dots 10^6$
Konvektiver Wärmestrom	0,1...7kW

Tabelle 3: Physikalische Parameter

Die Heizplatte wird durch ein spiralförmig verlegtes, elektrisches Heizkabel mit einer konstanten Wärmestromdichte beheizt. Da der Wirkungsgrad der Energieumwandlung von elektrischer Energie in Wärmeenergie in einem Heizkabel  $\eta=1$  ist, kann der Gesamtwärmestrom, der in die Anlage eingespeist wird, über die elektrische Leistung gemessen werden. Aufgrund der realen Gegebenheiten (leider gibt es keine ideale thermische Isolierung) wird ein Teil des Gesamtwärmestromes durch den Boden an das Erdreich abgegeben. Ein weiterer Teil wird an der Oberfläche der Heizplatte durch Konvektion an das Fluid abgegeben und der Rest geht über Strahlungsaustausch direkt in die Kühlplatte. Da die Strömung im Ilmenauer Fass unter nahezu allen Bedingungen turbulent ist, kann sich das Fluid zwischen Heiz- und Kühlplatte sehr gut durchmischen, so dass es bis auf eine dünne Schicht an jeder der beiden Platten eine einheitliche Temperatur annimmt. Diese Temperatur wird als Bulktemperatur  $\vartheta_B$  bezeichnet. Sie beträgt bei einer idealen adiabatischen Seitenwand, d.h. es fließt kein Wärmestrom durch die Seitenwand, exakt das arithmetische Mittel aus Heiz- und Kühlplattentemperatur. Im realen Experiment wird ein kleiner Teil des konvektiven Wärmestromes durch die Seitenwand an die Außenluft mit der Temperatur  $\vartheta_A$  abgegeben, während der überwiegende Teil über den zweiten konvektiven Wärmeübergang in die Kühlplatte fließt. Dadurch liegt die gemessene Bulktemperatur geringfügig niedriger ( $\vartheta_A < \vartheta_B$ ) oder höher ( $\vartheta_A > \vartheta_B$ ) als die theoretische Bulktemperatur.